Geometría III
Examen XVI

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría III
Examen XVI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Roxana Acedo Parra

Granada, 2025

Asignatura Geometría III.

Curso Académico 2025-26.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

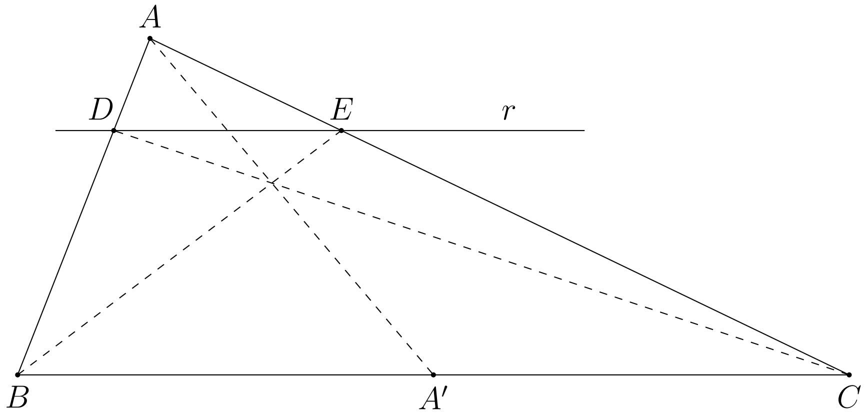
Profesor Antonio Ros Mulero.

Descripción Examen Parcial 1.

Fecha 22 de Octubre del 2025.

Duración 1 hora.

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** En el plano afín $\mathcal{A}$, dado un triángulo ABC, consideramos la mediana $A \vee A'$ y una recta r paralela a la base que corta a los lados en los puntos distintos D y E.



a) Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ la afinidad definida por la imagen de los vértices $f(A) = A$, $f(B) = C$ y $f(C) = B$. Razonar que f es una involución. Calcular los puntos fijos de f y demostrar que $f(r) = r$.

b) Usando f y sus propiedades, concluir que (si $B \vee E$ y $C \vee D$ no son paralelas) las rectas $A \vee A'$, $B \vee E$ y $C \vee D$ son concurrentes.

Ejercicio 2 (5 puntos)**.** En el espacio afín $\mathcal{A}^3$ y respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}$, consideramos los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 2)$ y el plano $\Pi \equiv x + y + z = 1$.

a) Calcular la intersección de la recta $A \vee B$ con el plano Π.

b) Encontrar el centro y la razón de la homotecia $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que lleva A en B y deja invariante el plano Π: $h(A) = B$ y $h(\Pi) = \Pi$.

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** En el plano afín $\mathcal{A}$, dado un triángulo ABC, consideramos la mediana $A \vee A'$ y una recta r paralela a la base que corta a los lados en los puntos distintos D y E.

a) Sea $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ la afinidad definida por la imagen de los vértices $f(A) = A$, $f(B) = C$ y $f(C) = B$. Razonar que f es una involución. Calcular los puntos fijos de f y demostrar que $f(r) = r$.

La afinidad $f \circ f$ fija los tres vértices del triángulo:

$$f \circ f(A) = A, \qquad f \circ f(B) = B, \qquad f \circ f(C) = C.$$

Por tanto, $f \circ f = \mathrm{Id}$ y f es una involución.

El conjunto de puntos fijos de f solo puede ser el vacío, un punto, una recta o todo el plano. La afinidad f fija el vértice A. Veamos que también fija el punto medio A':

$$f(A') = f\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) = \frac{1}{2}f(B) + \frac{1}{2}f(C) = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B = A'.$$

Como f no es la identidad, concluimos que el conjunto de puntos fijos es la mediana $A \vee A'$.

Veamos que $f(r) = r$.

Primera demostración.

La base $B \vee C$ es una recta fija de f. Como la recta r es paralela a $B \vee C$, se sigue que $f(r)$ es paralela a r. Sea P el punto donde se cortan r y $A \vee A'$. Entonces $f(P) = P$ (todos los puntos de la mediana son puntos fijos). Por tanto, las rectas paralelas $f(r)$ y r se cortan en P y concluimos que $f(r) = r$.

Segunda demostración.

Por el teorema de Tales, existe un escalar $a \neq 0$ tal que $\overrightarrow{AE} = a\,\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD} = a\,\overrightarrow{AB}$. Ahora calculemos la imagen de D.

Como f intercambia B y C, se tiene $f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$ y $f(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}$. Entonces:

$$f(D) = f(A + \overrightarrow{AD}) = f(A) + a\,f(\overrightarrow{AB}) = A + a\,\overrightarrow{AC} = A + \overrightarrow{AE} = E.$$

Entonces $f(r) \cap r \neq \emptyset$ y se sigue que $f(r) = r$.

b) Usando f y sus propiedades, concluir que (si $B \vee E$ y $C \vee D$ no son paralelas) las rectas $A \vee A'$, $B \vee E$ y $C \vee D$ son concurrentes.

Como f fija la recta r e intercambia los lados $A \vee B$ y $A \vee C$, tenemos que $f(D) = E$ y $f(E) = D$. Por tanto, f intercambia las rectas $B \vee E$ y $C \vee D$.

Sea $Q = (B \vee E) \cap (C \vee D)$ el punto donde se cortan dos de las tres rectas. Tenemos que:

$$f(Q) = f(B \vee E) \cap f(C \vee D) = (C \vee D) \cap (B \vee E) = Q.$$

Entonces Q es un punto fijo y, por tanto, pertenece a la tercera recta $A \vee A'$.

Ejercicio 2 (5 puntos)**.** En el espacio afín $\mathcal{A}^3$ y respecto del sistema de referencia $\mathcal{R}$, consideramos los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 2)$ y el plano $\Pi \equiv x + y + z = 1$.

a) Calcular la intersección de la recta $A \vee B$ con el plano Π.

Obtengamos primero las ecuaciones de la recta $A \vee B$

$$A \vee B = A + \mathcal{L}\left\{\overrightarrow{AB}\right\} = (1, 0, 1) + \mathcal{L}\{(-1, 1, 1)\} = (1, 0, 1) + \lambda(-1, 1, 1)$$

De ello concluimos que

$$x = 1 - \lambda \quad y = \lambda \quad z = 1 + y \Rightarrow \lambda = y = z - 1 = 1 - x$$

Consecuentemente

$$A \vee B \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

Si llamamos P al punto de intersección entre el plano Π y $A \vee B$, sabemos que P es el único punto que cumple las ecuaciones de ambos, es decir, la solución del sistema

$$P = \begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow P = (2, -1, 0)$$

Entonces, $\Pi \cap A \vee B = P = (2, -1, 0)$.

b) Encontrar el centro y la razón de la homotecia $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que lleva A en B y deja invariante el plano Π: $h(A) = B$ y $h(\Pi) = \Pi$.

Recordando la expresión de una homotecia de centro C y razón λ

$$h(P)_{C,\lambda} = \lambda\overrightarrow{CP} + C = \lambda P + (1 - \lambda)C$$

Expresándolo en el sistema de referencia dado y denotando $C = (c_1, c_2, c_3)$

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos usar que $h(A) = B$ y $h(\Pi) = \Pi$ para encontrar ecuaciones y resolver para C y λ

$$h\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda + (1-\lambda)c_1 \\ (1-\lambda)c_2 \\ \lambda + (1-\lambda)c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

También sabemos que si $P \in \Pi \Rightarrow h(P) \in \Pi$, sea $P = (x, y, z) \in \Pi$

$$h(P) = \begin{pmatrix} \lambda x + (1-\lambda)c_1 \\ \lambda y + (1-\lambda)c_2 \\ \lambda z + (1-\lambda)c_3 \end{pmatrix} \in \Pi \Rightarrow$$

$$\lambda x + (1-\lambda)c_1 + \lambda y + (1-\lambda)c_2 + \lambda z + (1-\lambda)c_3 = 1 \iff$$

$$\lambda(\underbrace{x+y+z}_{P \in \Pi}) + (1-\lambda)c_1 + (1-\lambda)c_2 + (1-\lambda)c_3 = 1 \iff$$

$$\lambda + (1-\lambda)c_1 + (1-\lambda)c_2 + (1-\lambda)c_3 = 1$$

Y nos quedan las ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda + (1-\lambda)c_1 = 0 \\ (1-\lambda)c_2 = 1 \\ \lambda + (1-\lambda)c_3 = 2 \\ \lambda + (1-\lambda)c_1 + (1-\lambda)c_2 + (1-\lambda)c_3 = 1 \end{cases}$$

Para resolverlo podemos, por ejemplo, sustituir en la última las dos primeras

$$0 + 1 + (1-\lambda)c_3 = 1 \Rightarrow (1-\lambda)c_3 = 0$$

Sustituimos este resultado en la tercera, obteniendo $\boxed{\lambda = 2}$. Con este dato obtenemos que $\boxed{C = (2, -1, 0)}$. Es decir, la homotecia que cumple las condiciones pedidas tiene como centro el punto de intersección entre la recta $A \vee B$ y el plano Π y razón 2.